数理解析研究所講究録 1283 巻 2002 年 27-32

Model theory of quasi-minimal structures

東海大学・理学部情報数理学科 若井 健太郎 (Kentaro Wakai)
Department of Mathematical Sciences, Tokai University

1 quasi-minimality

定義

- 無限構造 M 上の任意の 1 変数論理式 $\varphi(x) \in L(M)$ について $\{a \in M : M \models \varphi(a)\}$ または $\{a \in M : M \models \neg\varphi(a)\}$ が有限であるとき, M は *minimal* であるという. 理論 T の任意のモデルが minimal であるとき T は *strongly minimal* であるという.
- 非可算構造 M 上の任意の 1 変数論理式 $\varphi(x) \in L(M)$ について $\{a \in M : M \models \varphi(a)\}$ または $\{a \in M : M \models \neg\varphi(a)\}$ が高々可算であるとき, M は *quasi-minimal* であるという. コンパクト性定理より, 理論 T の任意のモデルが quasi-minimal であるということはありえない.
- κ は基数とする. 構造 M の任意の部分同型写像 $A \to B$ に対して, $|A| = |B| < \kappa$ ならば M の同型写像に拡大できるとき, M は *strongly κ-homogeneous* であるという. strongly $\aleph_0$-homogeneous のとき, 単に *homogeneous* と言うことにする.

minimal な構造 M では, M の部分集合 A に対して algebraic closure

$$\mathrm{acl}(A) = \{b \in M : b \models \varphi(x), \varphi(x) \in L(A), \varphi(x) \text{ の解は有限個}\}$$

を考えると (M, acl) が geometry になり, 次元を考えることができる. 例えば複素数体 $(C, +, \cdot)$ は minimal であり, 上記の次元は超越次元になる. これに指数関数を足した構造 $(C, +, \cdot, \exp)$ は minimal でない ($e^x = 1$ の解は $\{2n\pi i : n \in Z\}$). この構造に関して Zilber は次のような問題を挙げている [3].

- $(C, +, \cdot, \exp)$ は quasi-minimal か?

- $(C, +, \cdot, \exp)$ は strongly $|C|$-homogeneous か?
- $(C, +, \cdot, \exp)$ の同型写像は恒等写像と $i \mapsto -i$ 以外にあるか? (他に無く, homogeneous であれば, type がたくさんあることになるので quasi-minimal でなくなる)

なぜ homogeneity を考えるか 構造の性質を調べるとき, その構造の big model (十分大きな saturation をもつ elementary extension) の中で考えると (同じ type を持つ元は同型写像で移りあえる, など) 便利なことが多いが, quasi-minimal な構造の big model は quasi-minimal でなくなってしまう.

また, quasi-minimal な構造の中である論理式の解が可算でも, それを big model の同型写像で動かしたものは可算とは限らない. 構造が homogeneous であればその構造の同型写像で考えられるので都合がよい.

2 Pregeometry

定義 X を集合, $P(X)$ を X の部分集合全体の集合, cl を $P(X)$ から $P(X)$ への写像とする. 次の 4 つを満たすとき, (X, cl) は *pregeomery* であるという.

1. $A \subset B$ ならば $A \subset \mathrm{cl}(A) \subset \mathrm{cl}(B)$.
2. $b \in \mathrm{cl}(A)$ ならば, ある A の有限部分集合 A_0 が存在して $b \in \mathrm{cl}(A_0)$.
3. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$.
4. $b \in \mathrm{cl}(Ac) - \mathrm{cl}(A)$ ならば $c \in \mathrm{cl}(Ab)$ (exchange axiom).

構造 M が minimal ならば, (M, acl) が pregeometry になるが, 構造 M が quasi-minimal のときは,

$$\mathrm{ccl}(A) = \{b \in M : b \models \varphi(x), \varphi(x) \in L(A), \varphi(x) \text{ の } M \text{ での解は高々可算個}\}$$

とすれば (M, ccl) が pregeometry になるだろうか? 1,2 は明らかに成り立つが, 3,4 は成り立たない場合もある. たとえばグラフで, 1 点 a が可算個の点 $\{b_i : i < \omega\} \cup \{c_i : i < \omega\}$ と繋がっていて, b_i たちはさらに可算個の点 $\{d_{ij} : j < \omega\}$ と, c_i たちは非可算個の点と繋がっているものを考えると, $d_{ij} \in \mathrm{ccl}(\mathrm{ccl}(a)) - \mathrm{ccl}(a)$ である. そこで ccl の定義を次のように変える.

- $\mathrm{ccl}_0(A) = A$

- $\mathrm{ccl}_{n+1}(A) = \{b \in M : b \models \varphi(x), \varphi(x) \in L(\mathrm{ccl}_n(A)), \varphi(x)$ の M での解は高々可算個 $\}$
- $\mathrm{ccl}(A) = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{ccl}_n(A)$

つまり最初の定義を可算回くりかえすわけである. これで1,2,3は常に成り立つようになったが, exchange axiom は成り立たない場合がある. ここでいくつか quasi-minimal な構造の例を挙げる.

- minimal な構造は quasi-minimal である.
- 無限個の無限同値類を持つ同値関係だけの構造. strongly $\aleph_1$-homogenous でない.
  - 可算の同値類が非可算個.
  - 非可算同値類1個と可算同値類可算個の構造: exchange axiom は成り立たない, homogeneous でない.
- 非可算順序. exchange axiom が成り立たない.
  - $(\omega_1, <)$: successor が definable なので quasi-minimal でない.
  - $(\omega_1 \times Z, <)$: quasi-minimal だが homogeneous でない.
  - $(\omega_1 \times Q, <)$: quasi-minimal, homogeneous.
- $(C, +, \cdot)$ にグラフが可算の述語記号をを可算個つけたもの: quasi-minimal.
- $(C, \exp)$: quasi-minimal.
- ランダムグラフと同じ theory を持つ quasi-minimal model は存在しない [1]

quasi-minimal で homogeneous な構造では次が成り立つことがわかっている [1].

- $\mathrm{ccl} = \mathrm{ccl}_1$
- $|M| \geq \aleph_2$ なら exchange axiom が成り立つ.
- exchange axiom が成り立たなければ非可算の順序がある.
- 非可算の順序があれば $|M| \leq \aleph_1$.

- exchange axiom が成り立たなければ strict order property を持つ [2].

また, 構造 M が quasi-minimal, stable ならば, 可算個の定数記号を付け加えれば (M, ccl) は pregeometry になる [1]. 先ほどの例で, 非可算同値類 1 個と可算同値類可算個の同値関係の構造があったが, 非可算同値類の元 1 つを定数記号として言語に付け加えれば exchange が成り立つようになる.

3 Uncountable categoricity

定義 M は quasi-minimal, (M, ccl) は pregeometry, I は M の部分集合とする. 任意の $a \in I$ に対して $a \notin \mathrm{ccl}(I - \{a\})$ であるとき, I は *independent* であるという.

(X, cl) が pregeometry ならば

$$\dim(X) = \min\{|A| : X \subset \mathrm{cl}(A)\}$$

と次元を定義することができる. 例えば $(C, +, \cdot)$ は minimal なので acl で次元を定義することができ, 同じ理論を持つモデルで次元が同じならば同型になる. しかし同じことをやろうとすると, quasi-minimal な構造では次のような問題がある.

- すでに述べたように quasi-minimal な構造と theory が同じでも quasi-minimal とは限らない. そこで十分大きな quasi-minimal model を固定してその中で考えることにする. このときどれくらい大きな quasi-minimal extension が存在するか, 例えば, $\aleph_0$-saturated quasi-minimal extension は存在するか, という問題を考えることが出来る. この問題に関しては, superstable だと反例があり, ω-stable のときは拡大できることがわかっている [1].

- quasi-minimal model を一つ固定して, その submodel だけを対象としても, すべての submodel が ccl-closed であるわけではない. そこで ccl-closed なモデルだけを対象として考える. 非可算集合の ccl-closure はモデルになるが, 有限, 可算集合の ccl-closure はモデルになるとは限らない. また, 有限次元のモデルが存在しない場合もある. (無限同値類が無限個ある同値関係の構造は有限次元のモデルを持たないが, 可算個の同値類の元を定数記号として付け加えたものは任意の次元の ccl-closed なモデルを持つ)

- モデルの同型を証明するために同型写像を作ることを考える. 同じ非可算濃度の ccl-closed model M, N は同じ次元を持つ. そこで M, N の次元の witness I, J をとる. つまり $M = \mathrm{ccl}(I)$, $N = \mathrm{ccl}(J)$, $|I| = |J|$, I, J はそれぞれ independent. このときまず $\mathrm{tp}(I) = \mathrm{tp}(J)$ は次のように証明できる: $\bar{a} \in I$, $\bar{b} \in J$, $|\bar{a}| = |\bar{b}|$, $\bar{c} \in M - \mathrm{ccl}(\bar{a}\bar{b})$, に対して $\mathrm{tp}(\bar{a}/\bar{c}) = \mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{c})$ であることを $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ に関する帰納法で示す. これより independent ならば indiscernible であることがわかる.

  次に $f : \bar{a} \mapsto \bar{b}$, $c \in \mathrm{ccl}(\bar{a})$ のとき $f(c)$ をどう決めるかという問題がある. c が満たす解が可算の論理式 $\psi(x\bar{a})$ があるとき, $\psi(x\bar{b})$ は解が可算であるか? stable ならば可算個の定数記号を付け加えればよいが一般の場合はわかっていない. $\bar{a}, \bar{b}$ がそれぞれ independent ならば indiscernible であることよりうまくいくが, 同型写像を作る過程では independent でない場合も考えなくてはいけない.

- quasi-minimal かつ stable という強い条件を仮定しても反例がある: 非可算個の可算同値類を持つ同値関係の構造で, 各同値類が $(2^{\omega}, E_i)$ の非同型なモデルになっているものは, 次元が同じ ccl-closed model でも同型にならない. これは superstable, not ω-stable な例であるが, さらに強い ω-stablity を仮定した場合はどうか? さらに $\aleph_0$-saturated では? $\aleph_0$-saturated なら可算次元同士は同型写像が作れるが, 非可算の場合は?

- strongly κ-homnogeneous (κ はモデルの濃度) を仮定すれば同型写像は作れるが, もっと弱い条件では無理だろうか? 可算同値類が非可算個ある同値関係の構造は, $\aleph_1$-homogeneous でないが, 次元が同じ ccl-closed model は同型になる.

参考文献

[1] M. Itai, A. Tsuboi, and K. Wakai, *Construction of saturated quasi-minimal structures*, preprint, 2002

[2] H. Maesono, *A remark on quasi-minimal structures*, a talk given in Model theory meeting at Okayama University (Japan) on December 21, 2001.

[3] B. Zilber, *Field with pseudo-exponentiation*, preprint, 2000